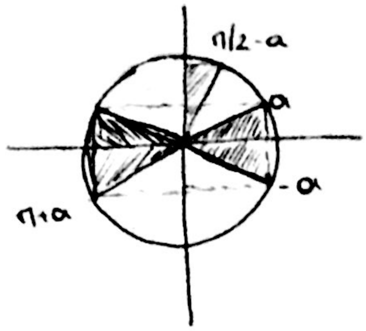
$-1 \leq \sin a \leq 1 \Leftrightarrow |\sin a| \leq 1$

$-1 \leq \cos a \leq 1 \Leftrightarrow |\cos a| \leq 1$



$\cos(\pi/2 - a) = \sin a$

$\sin(\pi/2 - a) = \cos a$

$\tan(\pi/2 - a) = \cot a$

$\cot(\pi/2 - a) = \tan a$

$\cos(-a) = \cos a$

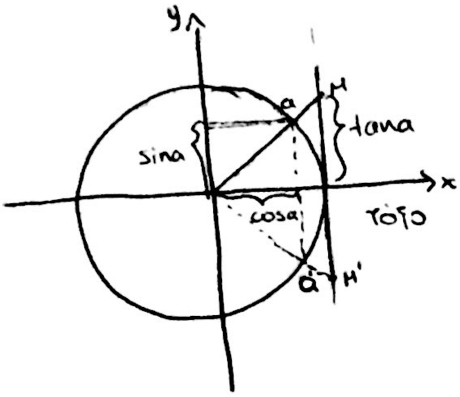
$\sin(-a) = -\sin a$

$\cos(\pi - a) = -\cos a$

$\sin(\pi - a) = \sin a$

$\cos(\pi + a) = -\cos a$

$\sin(\pi + a) = -\sin a.$



Σημαντικές Ανισότητες

• Για $0 < a < \pi/2$ ισχύει $0 < \underbrace{\sin a < a}_{①} \underbrace{< \tan a}_{②}$

① από το σχήμα $2\sin a < 2a \Rightarrow \sin a < a$

② γνωρίζουμε ότι $aa' < MM'$

• Για $|a| < \pi/2$ ισχύει $|\sin a| \leq |a| \leq |\tan a|$

Η ισότητα ισχύει για $a = 0$.

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροισμάτων και Διαφορών.

⊙ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (I)$

⊙ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad (II)$

Απόδειξη:

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) \overset{(I)}{=} \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

⊙ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (III)$

Απόδειξη:

$\cos(a+b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) =$

$= \cos a \cos b - \sin b \sin a.$

⊙ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (IV)$

Απόδειξη:

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

Μετατροπή γινομένων σε αθροίσματα

Προσθέτοντας τις (I) και (II) προκύπτει:

⊙ $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \quad (V)$

προσθέτοντας τις (III) και (IV) προκύπτει:

⊙ $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \quad (VI)$

αφαιρώντας τις (III) και (IV) προκύπτει:

⊙ $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ (VII)

Μετατροπή Αθροισμάτων σε Γινόμενα

Θέτοντας $a+b=A$ και $a-b=B \Rightarrow a=\frac{A+B}{2}$ και $b=\frac{A-B}{2}$

Από την (V) προκύπτει:

⊙ $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ (VIII)

$\sin A - \sin B = \sin A + \sin(-B) = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

⊙ $\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ (IX)

Από την (VI) προκύπτει:

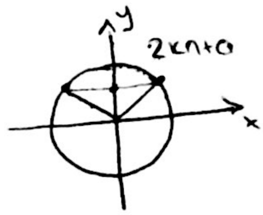
⊙ $\cos A + \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ (X)

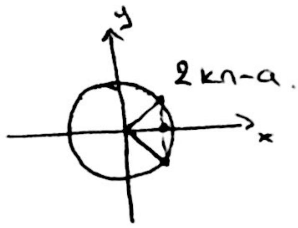
Από την (VII) προκύπτει:

⊙ $\cos B - \cos A = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ (XI)

Λύση Τριγωνομετρικών Εξισώσεων.

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + a, & k\in\mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - a), & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$





$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm a, \ k\in\mathbb{Z}$

$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = k\pi + a, \ k\in\mathbb{Z}$

Τύποι διπλάσιου Τόξου

⊙ $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a\cos a + \sin a\cos a \Rightarrow \sin(2a) = 2\sin a\cos a$.

⊙ $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a\cdot\cos a - \sin a\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a =$

$= (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

ή

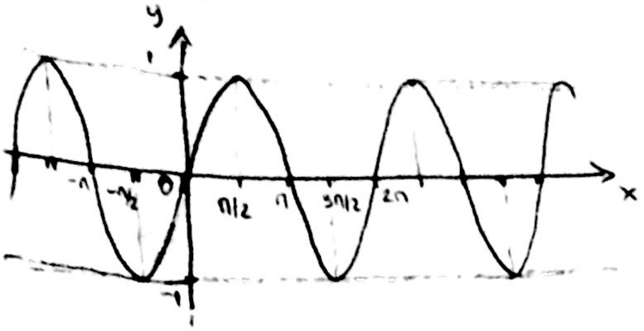
$= \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$.

Τύποι αποτετραγωνισμού

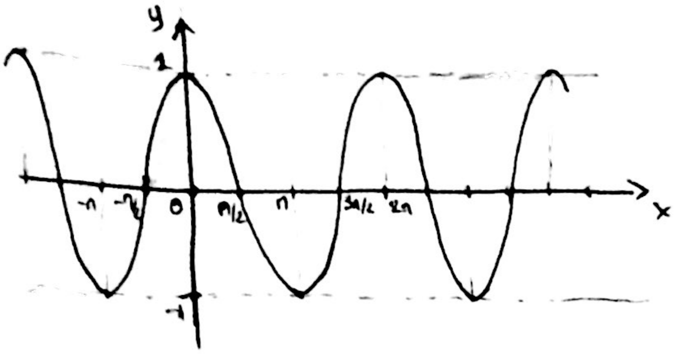
⊙ $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

⊙ $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

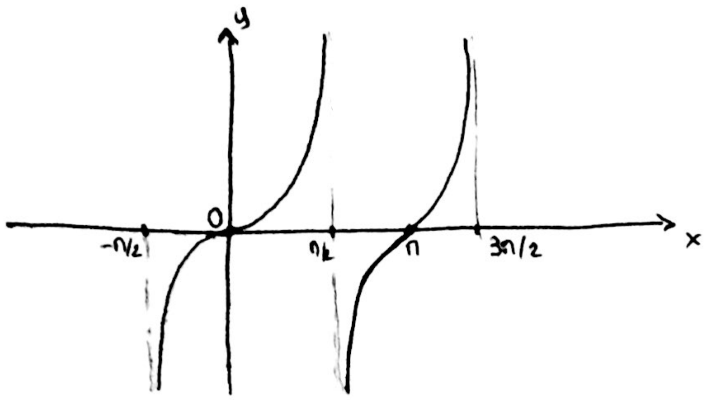
Γραφικές Παραστάσεις Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων



$y=\sin x$.



$y=\cos x$



$y=\tan x$.

Λύσεις Ασκήσεων:

Άσκηση 2: Αν $A=\left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ ν.δ.ο. $\inf A=0$

Υπενθύμιση: $\inf A=\lambda \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } x\geq\lambda \ \forall x\in A \\ \text{ii) } \forall\varepsilon>0 \ \exists x\in A \text{ ώστε } x<\lambda+\varepsilon. \end{cases}$

Απόδειξη:

→ Εφόσον $n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{n}>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

→ Έστω $\varepsilon>0$

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n}<\varepsilon$

ή ισοδύναμα ότι υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ με $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Από την αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$ $\exists n\in\mathbb{N}$ με $n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$.

Επομένως, $\inf A=0$.

Άσκηση 3: $\lambda \in \mathbb{R}$ $A=\{x\in\mathbb{Q} : x<\lambda\}$ Ν.δ.ο. $\sup A=\lambda$.

Υπενθύμιση: $\sup A=\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} i) \ x\leq\lambda \ \forall x\in A \\ ii) \ \forall \varepsilon>0 \ \exists x\in A \ x>\lambda-\varepsilon \end{cases}$

Απόδειξη:

→ καταρχήν $x\geq\lambda$

→ έστω $\varepsilon>0$

Εφόσον $\lambda-\varepsilon<\lambda$ από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$

$\exists x\in\mathbb{Q}$ $\lambda-\varepsilon<x<\lambda$

Εφόσον $x\in\mathbb{Q}$ $x<\lambda$ $\forall x\in A$ και $x>\lambda-\varepsilon$

Άρα, $\sup A=\lambda$.

Άσκηση 4: $\emptyset\neq A,B\subseteq\mathbb{R}$ ώστε $x<y$ $\forall x\in A$ και $\forall y\in B$

i) Ν.δ.ο. $\sup A\leq\inf B$

ii) Ν.δ. χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει $\sup A<\inf B$.

Απόδειξη:

i) Έστω τυχαίο $y\in B$

Τότε, ισχύει $x<y$ $\forall x\in A$

Συνεπώς, το y είναι άνω φράγμα του A

Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο, επομένως από το αξίωμα της πληρότητας έχει supremum. Άρα, $\sup A\leq y$.

Άρα, $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B

Το B είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, επομένως έχει infimum.

Άρα, $\sup A\leq\inf B$.

ii) $A=(-\infty,0)$, $B=[0,+\infty)$ ισχύει $x<y$ $\forall x\in A$ και $\forall y\in B$.

Τότε $x<y$ $\forall x\in A$ και $\forall y\in B$

$\inf B=0$
$\sup A=0$ Άρα, $\sup A=\inf B$.